

M úlohy (vyriešené) pre rok 2013

Úloha:

Nájdite najmenšie prirodzené číslo, ktorého ciferný súčet je 2013.

Riešenie:

Ak má byť prirodzené číslo s daným ciferným súčtom **čo najmenšie**, musí mať **čo najviac číslic 9**. Pretože $2013 = 223 \cdot 9 + 6$, hľadané číslo je **6 99 9** (šestka a za ňou 223 krát číslica 9).

Úloha:

Zapíšme za sebou čísla od 1 do 999:

12345678910111213 ... 997998999.

Aká číslica je na 2013. mieste od začiatku?



Riešenie:

Jednociferných čísel je 9. Zaberajú 9 miest.

Dvojciferných čísel je 90 (od 10 do 99). Zaberajú 180 miest.

Trojciferných čísel je 900 (od 100 do 999). Zaberajú 2700 miest.

Hľadané 2013. miesto je 1824. (2013 mínus 189) miesto medzi trojcifernými číslami.

Na 1824 miest sa zmestí $(1824 : 3) = 608$ trojciferných čísel. 608. trojica cifier v postupnosti 100101102... je číslo 707 (lebo 100 je prvá trojica, 101 je druhá trojica a teda 707 je 608. trojica), teda číslica na 2013. mieste je 7.

Úloha:

Zápis čísla K v desiatkovej sústave sa skladá z 2013 deviatok (999 ... 999). Stanovte, koľko deviatok obsahuje desiatkový zápis čísla K^2 .

Riešenie:

Môžeme napísať, že $K = 10^{2013} - 1$ (to číslo je vytvorené z 2013 deviatok za sebou).

Potom $K^2 = (10^{2013} - 1)^2 = 10^{4026} - 2 \cdot 10^{2013} + 1$. Ak to v náznaku rozpíšeme, je to takto:

1000 ... 000 ... 000 (4026 núl vedľa seba)

– 2 000 ... 000 (2013 núl vedľa seba)

9 ... 98 000 ... 000 (je tam 2012 deviatok, jedna 8, a 2013 núl vedľa seba)

teda K^2 obsahuje **2012** deviatok.

Úloha:

Na tabuli sú napísané všetky čísla od 1 do 2013 (vrátane). Ak najprv označíme z nich všetky, ktoré sú deliteľné dvomi, potom inou značkou označíme všetky čísla deliteľné tromi a na záver označíme zase inou značkou všetky čísla deliteľné štyrmi, koľko z čísel na tabuli bude potom označených **práve** dvomi značkami.

Riešenie:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 ... 2007 2008 2009 2010 2011 2012 2013

z nich všetkých deliteľných dvomi je 1006;

z nich všetkých deliteľných tromi je 671;

z nich všetkých deliteľných štyrmi je 503;

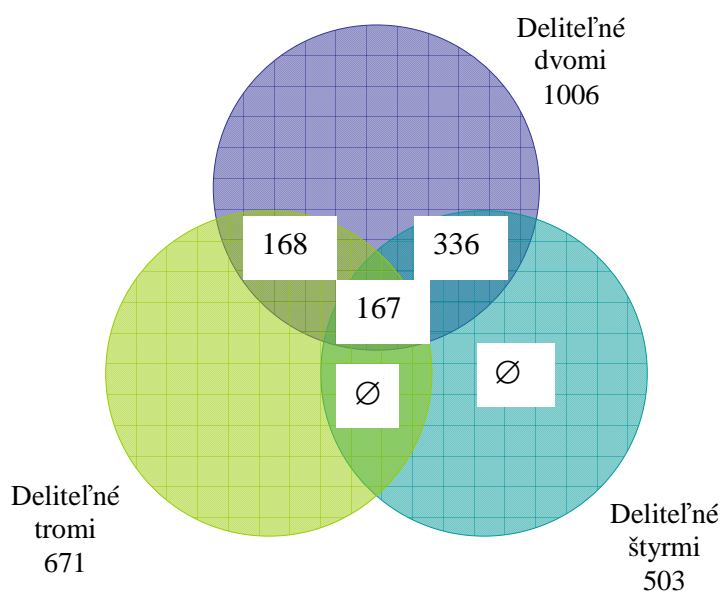
čísel deliteľných dvomi a zároveň štyrmi je 503

(čísla deliteľné štyrmi sú deliteľné aj dvomi);

čísel deliteľných dvomi a zároveň tromi (teda deliteľných šiestimi) je 335;

čísel deliteľných tromi a zároveň štyrmi (teda deliteľných dvanástimi) je 167;

čísel deliteľných dvomi a tromi a zároveň štyrmi (deliteľných dvanástimi) je 167;



Práve dvomi značkami bude označených **504** čísel (168 + 336).

Úloha:

Encyklopédia má očíslovaných 2013 strán (prirodzené čísla od 1 do 2013 vrátane). Stanovte, koľkokrát sa na týchto očíslovaných stránkach vyskytuje číslica 3.

Riešenie:

Predstavme si čísla od 1 do 2013 napísané pod sebou:

1
2
3
.
10
11
12
13
.
23
.
30
31
.
100
101
102
103
.
300
301
.
1001
1002
1003
.
1333
.
2001
2002
2003
.
201**3**

Určíme počet číslic **3** na miestach jednotiek. V každej desiatke (od začiatku) napísaných čísel je na mieste jednotiek jedna **3**, desiatok je medzi 2013 číslami práve 201, a ešte jedna za číslo 201**3** teda počet **3** na miestach jednotiek je 202.

Na mieste desiatok je **3** v stovke čísel 10 krát (**30**, **31**, ..., **39**). V postupnosti 2013 čísel je stoviek 20. To znamená spolu 200 číslic **3** na mieste desiatok.

Na mieste stoviek je v tisícke čísel cifra **3** v číslach **300**, **301**, ..., **399**, teda 100 krát. V postupnosti 2013 čísel sú dve tisícky, teda na miestach stoviek je 200 trojok.

Spolu je číslic **3** zrejme $202 + 200 + 200 = 602$.

Na stránkach očíslovaných od 1 do 2013 vrátane je použitá cifra **3** práve 602 krát.

Úloha:

Nájdite rôzne trojice prirodzených čísel $x < y < z$, ktoré sú riešením rovnice $x \cdot y \cdot z = 2013$.

Riešenie:

Pretože $2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$, tak ak zvolíme $x = 1$, potrebujeme vybrať ešte **dve čísla** z množiny $\{3, 11, 61\}$, tých možností je $C_2(3) = 3$, a tretím číslom bude súčin zostávajúcich čísel z tej množiny. Ak zvolíme $x = 3$, tak ďalšie čísla budú $y = 11$ a $z = 61$. Sú teda spolu štyri trojice prirodzených čísel pre požadované riešenie úlohy: $1, 3, 671$; $1, 11, 183$; $1, 33, 61$; $3, 11, 61$.

Úloha:

Stanovte, koľko prirodzených čísel menších než 10^{2013} má ciferný súčet 3.

Riešenie:

Každé prirodzené číslo menšie než 10^{2013} má najviac 2 013 cifier.

Teda s práve jednou číslicou (3) je ich 2 013 ($3, 30, 300, \dots, 3 \cdot 10^{2012}$).

Ak tam bude dvojica 1; 2 možností je $C_2(2013)$ a za dvojicu 2; 1 rovnako veľa. Spolu je to $2 \cdot C_2(2013) = 2013 \cdot 2012 = 4\,050\,156$

Ak tam budú práve tri jednotky, môžeme ich dávať na 2013 políčok, teda počet možností je $C_3(2013) = (2013 \cdot 2012 \cdot 2011) / 6 = 1\,357\,477\,286$.

Spolu všetkých požadovaných možností teda je $2013 + 4\,050\,156 + 1\,357\,477\,286 = 1\,361\,529\,455$.

(dmj)