



To vedel už Euklides

Už od čias antických Grékov sa za **dokonalé čísla** považujú tie prirodzené čísla, pre ktoré platí, že súčet všetkých ich deliteľov sa rovná dvojnásobku daného čísla. Alebo takto: Prirodzené číslo n je **dokonalé**, ak sa rovná súčtu všetkých svojich *vlastných* (t.j. menších ako n) deliteľov. Napríklad: Číslo 6 ($= 1 + 2 + 3$) je **dokonalé** číslo; aj 28 ($= 1 + 2 + 4 + 7 + 14$) a 496 (preverte si to) sú **dokonalé** čísla. Euklides (asi 340 – 287 pred n. l.) v IX. knihe *Základy* v časti XXXVI dokázal: *Ak sú postupne od jednotky dané čísla v pomere 1:2, až sa ich súčet stane prvočísлом a ak sa tento súčet vynásobí posledným z týchto čísel, tak takto vzniknuté číslo bude dokonalé.*

Naznačme si toto tvrdenie na príklade:

$(1 + 2 + 4 + 8 + 16) \cdot 16 = 496$ ($= 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248$) je **dokonalé**.

31 je prvočíslo

Dokážeme vetu:

Ak sú p aj $(2^p - 1)$ prvočísla, tak $2^{p-1} \cdot (2^p - 1)$ je dokonalé číslo.

Nech p je prvočíslo. Ak je $(2^p - 1)$ tiež prvočíslo, tak *vlastní* delitelia čísla

$2^{p-1} \cdot (2^p - 1)$ sú čísla 1, 2, 4, 8, ..., 2^{p-1} , $(2^p - 1)$, $2 \cdot (2^p - 1)$, $4 \cdot (2^p - 1)$, $8 \cdot (2^p - 1)$, ..., $2^{p-2} \cdot (2^p - 1)$.

Ak určíme súčet všetkých týchto *vlastných* deliteľov dostaneme

$$(1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{p-1}) + (1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{p-2}) \cdot (2^p - 1) =$$

$$(2^p - 1)$$

$$(2^{p-1} - 1)$$

{je to súčet geometrického radu}

$$= (2^p - 1) + (2^{p-1} - 1) \cdot (2^p - 1) = [1 + (2^{p-1} - 1)] \cdot (2^p - 1) = 2^{p-1} \cdot (2^p - 1),$$

teda je splnená definícia **dokonalého** čísla.

Euklides poznal **štyri dokonalé čísla: 6, 28, 496, 8128**. Ďalšie **dokonalé** číslo (33 350 336) objavil asi J. Müller–Regiomontanus (1436–1476). Leonhard Euler (1707–1783) určil ďalšie tri **dokonalé** čísla a dokázal, že **každé párne dokonalé číslo má tvar podľa Euklida $2^{p-1} \cdot (2^p - 1)$, kde p aj $(2^p - 1)$ sú prvočísla**. Ani dodnes nevieme, či existuje nepárne dokonalé číslo, ani či je dokonalých čísel konečný alebo nekonečný počet.