

M úlohy (vyriešené) pre rok 2014



Úloha:

Stanovte najmenšie prirodzené číslo, ktorého ciferný súčet je 2014.

Riešenie:

Ak má byť prirodzené číslo s daným ciferným súčtom čo najmenšie, musí mať aj čo najmenší rád, t. j. počet cifier a teda čo najviac číslic 9.

Pretože $2014 : 9 = 223 + 7$, hľadané číslo bude 7999...9 (223 deviatok).

Úloha:

Nájdite rôzne trojice prirodzených čísel $x < y < z$, ktoré sú riešením rovnice $x \cdot y \cdot z = 2014$.

Pretože $2014 = 2 \cdot 19 \cdot 53$, tak ak zvolíme $x = 1$, vyberieme ešte jedno číslo z množiny $\{2, 19, 53\}$, možností sú 3, a tretím číslom bude súčin zostávajúcich čísel z tejto množiny. Ak zvolíme $x = 2$, tak ďalšie čísla budú $y = 19$ a $z = 53$. Sú teda spolu štyri trojice prirodzených čísel pre požadované riešenie úlohy:

1, 2, 1007; 1, 19, 106; 1, 38, 53; 2, 19, 53.

Úloha:

Encyklopédia má očíslovaných 2014 strán (prirodzené čísla od 1 do 2014 vrátane). Stanovte, koľkokrát sa na týchto očíslovaných stránkach vyskytuje číslica 4.

Riešenie:

Predstavme si čísla od 1 do 2014 napísané za sebou:

1 2 3 4 ... 10... 14 ... 24 ... 34 ...

40 41 ...

400 401 ... 1400 ...

2004 ... 2014

Určíme počet číslic 4 na miestach jednotiek. V každej desiatke (od začiatku) napísaných čísel je na mieste jednotiek jedna 4, desiatok je medzi 2014 číslami práve 201, a ešte jedna za číslo 2014, teda počet cifier 4 na miestach jednotiek je 202.

Na mieste desiatok je cifra 4 v stovke čísel 10 krát (40, 41, ..., 49). V postupnosti 2014 čísel je stoviek 20. To znamená spolu 200 číslic 4 na mieste desiatok.

Na mieste stoviek je v tisícke čísel cifra 4 v číslach 400, 401, ..., 499, teda 100 krát. V postupnosti 2014 čísel sú dve tisícky, teda na miestach stoviek je 200 štvoriek.

Spolu je číslic 4 zrejme $202 + 200 + 200 = 602$.

Na stránkach očíslovaných od 1 do 2014 vrátane je použitá cifra 4 práve 602 krát.

Úloha:

Stanovte, koľko rôznych štvoríc prirodzených čísel $x < y < z < t$ je riešením rovnice $x \cdot y \cdot z \cdot t + 12 = 2014$.

Riešenie:

Má platiť $x \cdot y \cdot z \cdot t = 2002 = 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$ (rozklad čísla 2002 na prvočísla).

Teda, ak zvolíme $x = 1$, vyberieme ešte **dve čísla** z množiny $\{2, 7, 11, 13\}$, tých možností je $C_2(4) = 6$, a štvrtým číslom bude súčin zostávajúcich čísel z tej množiny. Ak zvolíme $x = 2$, tak ďalšie čísla budú $y = 7$, $z = 11$ a $t = 13$, teda je to už siedma možnosť.

Spomínanej úlohe vyhovuje **sedem možností** pre požadované usporiadané štvorice.

Úloha:

Stanovte, koľko prirodzených čísel menších než 10^{2014} má ciferný súčet 3.

Riešenie:

Každé prirodzené číslo menšie než 10^{2014} má najviac 2 014 cifier.

Teda s práve jednou číslicou (3) je ich 2 014 (3, 30, 300, ... $3 \cdot 10^{2013}$).

Ak tam bude dvojica číslic 1 a 2, možností je $C_2(2014)$ a za dvojicu 2 a 1 rovnako veľa.

Spolu je to $2 \cdot C_2(2014) = 2014 \cdot 2013 = 4\,054\,182$

Ak tam budú práve tri jednotky, môžeme ich dávať na 2014 políčok,

teda počet možností je $C_3(2014) = (2014 \cdot 2013 \cdot 2012) / 6 = 1\,359\,502\,364$

Spolu všetkých požadovaných možností teda je

$2014 + 4\,054\,182 + 1\,359\,502\,364 = \mathbf{1\,363\,558\,560}$.

Úloha:

Zapíšme za sebou čísla od 1 do 999: 12345678910111213 ... 997998999.

Aká číslica je na 2014. mieste od začiatku?

Riešenie:

Jednociferných čísel je 9. Zaberajú 9 miest.

Dvojciferných čísel je 90 (od 10 do 99). Zaberajú 180 miest.

Trojčiferných čísel je 900 (od 100 do 999). Zaberajú 2700 miest.

Hľadané 2014. miesto je 1825. (2014 mínus 189) miesto medzi trojčifernými číslami.

Na 1825 miest sa zmestí $(1825 : 3) = 608$ trojčiferných čísel a ešte jedna cifra.

608. trojica cifier v postupnosti 100101102... je číslo 707 (lebo 100 je prvá trojica,

101 je druhá trojica a teda číslo 707 je 608. trojica) za ním nasleduje číslo 708,

teda číslica na 2014. mieste je **7**.

Úloha:

Zápis čísla K v desiatkovej sústave sa skladá z 2014 deviatok (999 ... 999).

Stanovte, koľko deviatok obsahuje desiatkový zápis čísla K^2 .

Riešenie:

Môžeme napísať, že $K = 10^{2014} - 1$ (to číslo je vytvorené z 2014 deviatok za sebou).
Potom $K^2 = (10^{2014} - 1)^2 = 10^{4028} - 2 \cdot 10^{2014} + 1$. Ak to v náznaaku rozpíšeme, je to takto:

$$\begin{array}{r} 1000 \dots 000 \dots 000 \text{ (4028 núl vedľa seba)} \\ - 2\,000 \dots 000 \text{ (2014 núl vedľa seba)} \\ \hline \end{array}$$

9 ... 98 000 ... 000 (je tam 2013 deviatok, jedna 8, a 2014 núl vedľa seba)
teda K^2 obsahuje **2013** deviatok.

Úloha:

Stanovte zvyšok po delení čísla 10^{2014} číslom 15.

Riešenie:

Vieme, že $10^{2014} = 100\dots000 = 99 \dots 990 + 10$.

$$\begin{array}{ccc} \underbrace{\hspace{2cm}} & \underbrace{\hspace{2cm}} & \\ 2014 \text{ núl} & & 2013 \text{ deviatok} \end{array}$$

Číslo 99... 990 (je tam 2013 deviatok) je deliteľné 3 aj 5, teda aj 15, a preto číslo $10^{2014} = 100\dots000 = (99 \dots 990 + 10)$ má po delení číslom 15 zvyšok 10.



Úloha:

Na tabuli sú napísané všetky čísla od 1 do 2014 (vrátane). Ak najprv označíme z nich všetky, ktoré sú deliteľné dvomi, potom inou značkou označíme všetky čísla deliteľné tromi a na záver označíme zase inou značkou všetky čísla deliteľné štyrmi, koľko z čísel na tabuli bude potom označených práve dvomi značkami.

Riešenie:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 ... 2007 2008 2009 2010 2011 2012 2013 2014

z nich všetkých deliteľných dvomi je 1007;

z nich všetkých deliteľných tromi je 671;

z nich všetkých deliteľných štyrmi je 503;

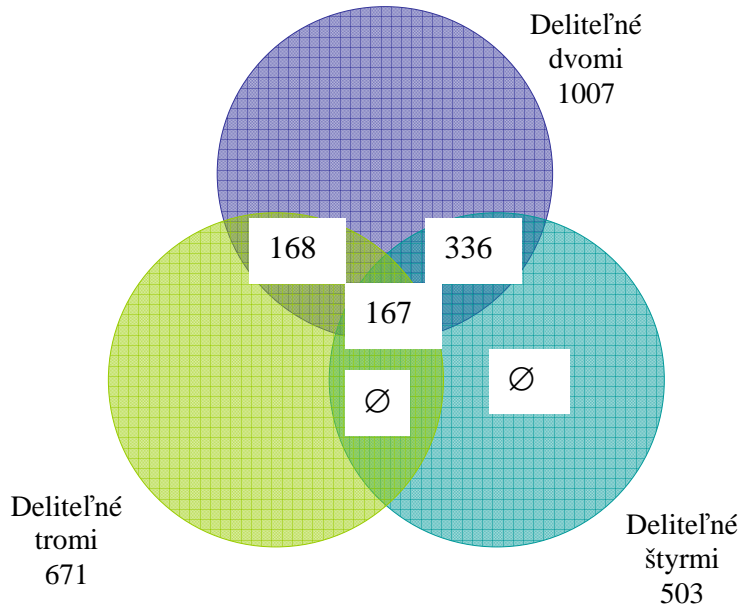
čísel deliteľných dvomi a zároveň štyrmi je 503

(čísla deliteľné štyrmi sú deliteľné aj dvomi);

čísel deliteľných dvomi a zároveň tromi (teda deliteľných šiestimi) je 335;

čísel deliteľných tromi a zároveň štyrmi (teda deliteľných dvanástimi) je 167;

čísel deliteľných dvomi a tromi a zároveň štyrmi (deliteľných dvanástimi) je 167;



Práve dvomi značkami bude označených 504 čísel (168 + 336).